CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a IX-a

1. Fie $a,b,c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $a+b+c=\frac{\pi}{2}$. Demonstraţi că

$$\mathrm{tg}a\cdot\mathrm{tg}b+\mathrm{tg}b\cdot\mathrm{tg}c+\mathrm{tg}c\cdot\mathrm{tg}a=1.$$

Soluţie:

Avem că $c=\frac{\pi}{2}-(a+b)$, deci $\mathrm{tg}c=\frac{1}{\mathrm{tg}(a+b)}$ 2p

Rezultă că $\mathrm{tg}c=\frac{1-\mathrm{tg}a\cdot\mathrm{tg}b}{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}$ 2p

Obţinem că $(\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b)\cdot\mathrm{tg}c=1-\mathrm{tg}a\cdot\mathrm{tg}b$, de unde cerinţa problemei 3p

2. În urma unui accident la o fabrică de produse petrochimice, o cantitate de 2 tone de nitraţi a fost deversată într-un râu din apropiere. Concentraţia de nitraţi maxim admisă este de 0,05 mg / ℓ, iar cea măsurată în urma accidentului este de 250 mg / ℓ. Măsurile luate pentru remedierea situaţiei fac aşa încât, în fiecare zi de la contaminare, concentraţia de nitraţi în zona respectivă să scadă la jumătate faţă de ziua precedentă.

a) În câte zile concentraţia de nitraţi scade sub concentraţia maximă admisă?

b) Ştiind că 10% din viaţa activă a zonei moare zilnic din cauza poluării, aflaţi ce procent din populaţia iniţială mai este în viaţă în ziua în care concentraţia de nitraţi reintră în limite normale.

Soluţie:

a) După n zile de la accident, concentraţia de nitraţi este $\frac{250}{2^n}\,\mathrm{mg}/\ell$ 2p

Se impune condiţia $\frac{250}{2^n}\le 0,05$ şi obţinem $n\ge 13$, adică după 13 zile concentraţia de nitraţi scade sub cea maximă admisă 2p

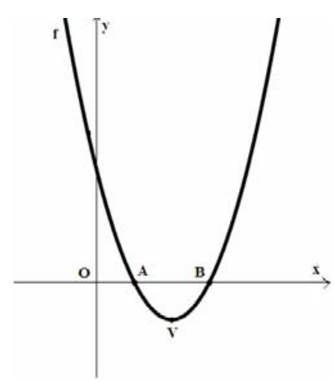
b) După 13 zile, populaţia devine $\left(\frac{9}{10}\right)^{13}$ din cea iniţială 2p

Procentul cerut este de $\left(\frac{9}{10}\right)^{13}\cdot 100\%$ 1p

3. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$, are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura alăturată.

a) Demonstraţi că, dacă $a\cdot c\ge 4$, atunci $|b|\ge 5$.

b) Determinaţi numărul a în cazul în care punctele A şi B sunt: A(1, 0), respectiv B(3, 0), iar triunghiul AVB are aria egală cu 1.



Soluţie:

a) Parabola intersectează axa Ox în două puncte distincte, aşadar $b^2 > 4ac$ 2p

Obţinem că $b^2 > 16$ şi, cum $b \in \mathbb{Z}$, rezultă că $|b| \geq 5$ 1p

b) Avem că $x_V = 2 = -\frac{b}{2a}$, prin urmare $b = -4a$ 1p

Din f(1) = 0 deducem că a + b + c = 0, de unde c = 3a 1p

Astfel, $f(x) = a(x^2 - 4x + 3), a \neq 0$. Observăm că $y_V = f(2) = -a$, aşadar aria triunghiului AVB este egală cu $|a| = 1$ 1p

Cum parabola are ramurile în sus, rezultă că a > 0 şi atunci a = 1 .... 1p

4. Numim *placă* un triunghi dreptunghic, împreună cu interiorul său.
Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, demonstraţi că interiorul oricărui patrulater convex poate fi acoperit complet cu n *plăci* care nu se supapun (au interioarele disjuncte).

Soluţie:

Observăm întâi că interiorul oricărui triunghi poate fi împărţit în două triunghiuri dreptunghice, ducând înălţimea din vârful unghiului cel mai mare (precauţie necesară dacă triunghiul iniţial este obtuzunghic) 2p

Dacă $n = 4$, o diagonală împarte interiorul patrulaterului în două triunghiuri, iar după procedeul de mai sus obţinem o acoperire cu 4 plăci 2p

Dacă se poate acoperi patrulaterul folosind k plăci, putem realiza o acoperire cu $k+1$ plăci împărţind una dintre plăci în două cu ajutorul înălţimii corespuzătoare ipotenuzei 3p

<u>**Notă:**</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a X-a

1. Un grup de patru tineri se numeşte *frumos* dacă din grup face parte cel puţin o fată. Stabiliţi câte grupuri *frumoase* se pot forma din echipa de dans sportiv a unui liceu, alcătuită din Alina, Bogdan, Cristina, Daniel, Elena, Florin, Gabriela şi Horaţiu.

Soluţie:
În echipa de dans sunt 4 fete şi 4 băieţi, deci un grup frumos poate avea în componenţa sa una, două, trei sau patru fete şi restul (până la 4) băieţi. ………………………………………………. 2p
Există $C_4^1 \cdot C_4^3 = 16$ grupuri de patru tineri care conţin câte o fată, ………………….…………… 1p
$C_4^2 \cdot C_4^2 = 36$ grupuri de patru tineri care conţin câte două fete, ……………………………..…. 1p
$C_4^3 \cdot C_4^1 = 16$ grupuri de patru tineri care conţin câte trei fete ……………………….……..…. 1p
şi $C_4^4 \cdot C_4^0 = 1$ grup format din patru fete. ……………………………………………………….. 1p
Numărul total de grupuri frumoase este 69. …………………………………………………… 1p

2. În plan, considerăm mulţimea $\mathcal{P}$ a tuturor punctelor cu ambele coordonate întregi, precum şi mulţimea $\mathcal{D}$ a tuturor dreptelor care trec prin cel puţin două puncte din $\mathcal{P}$.
a) Demonstraţi că prima bisectoare (dreapta de ecuaţie y = x) aparţine mulţimii $\mathcal{D}$.
b) Demonstraţi că orice dreaptă din mulţimea $\mathcal{D}$ conţine cel puţin 3 puncte din mulţimea $\mathcal{P}$.
c) Demonstraţi că nu există nicio dreaptă oblică *d* în mulţimea $\mathcal{D}$ astfel încât $A(1,\sqrt{2012}) \in d$.

Soluţie:
a) Cum punctele O(0, 0) şi B(1, 1) se află pe prima bisectoare şi aparţin şi mulţimii $\mathcal{P}$, deducem că prima bisectoare aparţine mulţimii $\mathcal{D}$. 2p
b) Fie $d \in \mathcal{D}$; atunci există $M(x_0, y_0) \in d$ şi $N(x_1, y_1) \in d$, cu $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$. Se verifică imediat că simetricul punctului M faţă de punctul N este punctul $S(2x_1 - x_0, 2y_1 - y_0) \in d$. 2p
c) Fie $d \in \mathcal{D}$; atunci există $M(x_0, y_0) \in d$ şi $N(x_1, y_1) \in d$, cu $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$. Deducem imediat că panta dreptei *d* este $m_d = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \in \mathbb{Q}$, iar ecuaţia dreptei este $y - y_0 = m_d(x - x_0)$. 1p
Dacă, prin reducere la absurd, $A(1,\sqrt{2012}) \in d$, atunci $\sqrt{2012} - y_0 = m_d(1 - x_0)$, de unde $\sqrt{2012} = y_0 + m_d(1 - x_0) \in \mathbb{Q}$, contradicţie! 2p

3. Smaranda alege atent un număr natural a, apoi Nicu alege la întâmplare un număr real strict pozitiv x. Dacă unul dintre numerele $A = 10 - \log_2(x^2)$ sau $B = \log_2(16x)$ este cel puţin egal cu a, atunci Nicu îi va face Smarandei un cadou în valoare de 3^a lei.
Ce număr trebuie să aleagă Smaranda pentru a fi sigură că va primi un cadou cât mai valoros?

Soluţie

Din A ≥ a sau B ≥ a, deducem $x \le 2^{\frac{10-a}{2}}$ sau $x \ge 2^{a-4}$ ……………………………………………….. 2p
Pentru a fi sigură că va primi un cadou, Smaranda ar trebui să aleagă un număr a astfel încât $2^{a-4} \le 2^{\frac{10-a}{2}}$, ……………………………………………………………………………….. 2p
adică $a \le 6$. ……………………………………………………………………………….. 2p
Cum funcţia $a \mapsto 3^a$ este strict crescătoare, Smaranda ar trebui să aleagă numărul a = 6. ……….. 1p

4. Fie $u = 2012^{3n}$ şi $v = 2012^{2n} \cdot 2011^n + 2012^n \cdot 2011^{2n} + 2 \cdot 2011^{3n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstraţi că există valori ale lui n pentru care $u < v$.

b) Demonstraţi că există valori ale lui n pentru care $u > v$.

Soluţie:
Observăm că

$$\begin{aligned} u - v &= 2012^{3n} - 2011^{3n} - 2011^n \cdot (2012^{2n} + 2012^n \cdot 2011^n + 2011^{2n}) \\ &= (2012^n - 2 \cdot 2011^n) \cdot (2012^{2n} + 2012^n \cdot 2011^n + 2011^{2n}), \end{aligned}$$

unde a doua paranteză este strict pozitivă, indiferent de valoarea lui n. ……………………..……... 2p
a) Pentru n = 0 avem că $2012^0 - 2 \cdot 2011^0 = -1 < 0$, deci $u < v$. ………………………………… 2p
b) Folosind binomul lui Newton, pentru prima paranteză are loc evaluarea

$$2012^n - 2 \cdot 2011^n = (2011+1)^n - 2 \cdot 2011^n = C_n^1 2011^{n-1} + ... + C_n^n - 2011^n > (n - 2011) 2011^{n-1}.$$

(Altfel, conform inegalităţii lui Bernoulli obţinem că

$$2012^n - 2 \cdot 2011^n = 2011^n \left(\left(1 + \frac{1}{2011}\right)^n - 2 \right) \ge 2011^n \left(1 + \frac{n}{2011} - 2\right).)$$ ……………….... 2p

Pentru n suficient de mare (de exemplu, n = 2012) avem că $u > v$. ……………………………... 1p

Notă: Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a XI a

1. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Scrieţi ecuaţia dreptei d care este asimptotă oblică la graficul funcţiei f.
b) Argumentaţi că funcţia f este convexă.
c) Demonstraţi că aria suprafeţei cuprinsă între dreapta d, graficul funcţiei f, dreptele x = 1 şi x = 2 este mai mică decât $\dfrac{5}{12}$.

Soluţie:
a) d: y = x – 1 .... 2p
b) $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} > 0, \forall x \in [0, \infty) \Rightarrow$ f este convexă 2p

c) Dreapta x = 1 intersectează pe d în A(1, 0) şi graficul lui f în $B\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$. Dreapta x = 2 intersectează graficul lui f în $C\left(2, \dfrac{4}{3}\right)$ şi dreapta d în punctul D(2, 1) 1p

Aria cerută este mai mică decât $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{5}{12}$ 2p

2. a) Demonstraţi că ecuaţia $x^5 - x = m$ are cel mult trei soluţii reale, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

b) Fie a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a^5 - a = b^5 - b = c^5 - c = d^5 - d$. Demonstraţi că determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ este nul.

Soluţie:
a) Demonstrarea cerinţei 3p
b) Conform a), există două numere egale printre cele patru numere date 2p
Atunci determinantul dat are (măcar) două coloane egale, deci este nul 2p

3. Pentru fiecare număr natural n se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ n & 1 & n \\ n & n & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că nu există niciun număr natural n pentru care matricea A(n) să aibă rangul 2.
b) Se numeşte *pas* următoarea modificare a elementelor unei matrice de tipul A(n): fiecare element de pe diagonala principală se măreşte sau se micşorează cu 2, iar toate celelalte şase elemente se măresc sau se micşorează cu 1. Stabiliţi dacă este posibil ca, plecând de la A(2), după 2012 astfel de *paşi*, determinantul matricei obţinute să fie egal cu 2012.

Soluţie:

a) $\det A(n) = (2n+1)(1-n)^2$ 1p

O condiţie necesară (nu şi suficientă) pentru ca rangul matricei să fie egal cu 2 este det A(n) = 0; cum n este număr natural, deducem n = 1. .... 1p

Însă, în acest caz, rangul matricei este 1 şi concluzia se impune.. 1p

b) Elementele de pe diagonala principală vor fi mereu impare. 1p

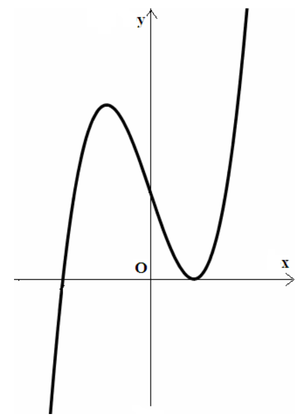
După un număr par de paşi, elementele care nu aparţin diagonalei principale rămân pare 1p

Determinantul matricei obţinute va fi astfel un număr impar, deci nu poate fi egal cu 2012 .... 2p

4. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = ax^3 + bx + c,$ are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura alăturată. Demonstraţi că:

a) $8a + 2b + c \geq 0$

b) $abc < 0$.



Soluţie:

a) Lectura grafică arată că $f(2) \geq 0$, deci $8a + 2b + c \geq 0$ 2p

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$ 1p

$f(0) = c > 0$ 1p

Deoarece f are două puncte de extrem distincte, ecuaţia de gradul doi care dă punctele critice, $3ax^2 + b = 0$, are două soluţii reale distincte; deducem că $b < 0$ 2p

În concluzie, $abc < 0$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a XII-a

1. Fie mulţimea $\mathcal{A}$ = {LEU, TIGRU, URS, LUP, IEPURE}. Pe $\mathcal{A}$ definim o lege de compoziţie asociativă, notată ♥, descrisă mai jos:

♥	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE
LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU
TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU
URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS
LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP
IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE

a) Câte legi de compoziţie comutative se pot defini pe $\mathcal{A}$? Se află ♥ printre aceste legi?

b) Legea de compoziţie ♥ are element neutru?

c) Calculaţi $\mathrm{LEU}^{2012} = \underbrace{\mathrm{LEU}\heartsuit\mathrm{LEU}\heartsuit\ldots\heartsuit\mathrm{LEU}}_{2012}$.

d) Rezolvaţi ecuaţia $\mathrm{LEU}\heartsuit\, x \,\heartsuit\mathrm{TIGRU} = \mathrm{IEPURE}$, unde necunoscuta este $x \in \mathcal{A}$.

Soluţie:

a) Se pot defini 5^{15} legi comutative 1p

Legea ♥ este comutativă, deoarece tabla operaţiei este simetrică faţă de diagonala principală …. 1p

b) IEPURE este elementul neutru pentru legea ♥ (în tabla operaţiei, linia şi coloana acestui element coincid cu linia, respectiv coloana de bordare 1p

c) Se observă că LEU^5 = IEPURE (element neutru) 1p

$\mathrm{LEU}^{2012} = \mathrm{LEU}^2 = \mathrm{LEU}\heartsuit\mathrm{LEU} = \mathrm{TIGRU}$ 1p

d) Compunem la stânga cu LUP şi la dreapta cu URS; obţinem unica soluţie x = TIGRU 2p

2. Calculaţi $\int_0^2 \max\left\{\ln\left(1+x^2\right);1\right\}dx.$

Soluţie:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x^2) - 1$. Deoarece $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \geq 0, \forall x \in [0,\infty)$, rezultă că f este funcţie crescătoare pe $[0, \infty)$ 1p

Deoarece $f(0) = -1$ şi $f\left(\sqrt{e-1}\right) = 0$, deducem că

$$\max\left\{\ln\left(1+x^2\right),1\right\} = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x \in \left[0,\sqrt{e-1}\right] \\ \ln\left(1+x^2\right), \text{ pentru } x \in \left[\sqrt{e-1},2\right] \end{cases}$$ 2p

$\int_0^2 \max\left\{\ln\left(1+x^2\right),1\right\}dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} 1dx + \int_{\sqrt{e-1}}^2 \ln\left(1+x^2\right)dx =$ 1p

$= 2\ln5 - 4 + 2\text{arctg}2 + 2\sqrt{e-1} - 2\text{arctg}\sqrt{e-1}$ 3p

3. Se consideră funcţiile $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = 1 + x^{n^2-1} + x^{n^2+2n}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Notăm cu σ_n aria subgraficului funcţiei f_n.

a) Demonstraţi că $\sqrt{\sigma_n} = \dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

b) Demonstraţi că $2012,2012 < \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3} + ... + \sqrt{\sigma_{2013}} < 2013$.

Soluţie:

a) $\sigma_n = \int_0^1 \left(1 + x^{n^2-1} + x^{n^2+2n}\right)dx = \left(x + \dfrac{x^{n^2}}{n^2} + \dfrac{x^{n^2+2n+1}}{n^2+2n+1}\right)\Bigg|_0^1$ 1p

$= 1 + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{\left(n^2+n+1\right)^2}{n^2(n+1)^2}$ 1p

$\sqrt{\sigma_n} = \dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$ 1p

b) $\sqrt{\sigma_n} = 1 + \dfrac{1}{n^2+n} = 1 + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ 2p

$\sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3} + ... + \sqrt{\sigma_{2013}} = 2013 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2014} < 2013$ 1p

$\sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3} + ... + \sqrt{\sigma_{2013}} = 2013 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2014} > 2012,2012$ 1p

4. Fie n $\in \mathbb{N}$, n $\geq$ 2 şi polinomul $f = X^n - 2nX^{n-1} + \left(2n^2-4\right)X^{n-2} + a_3X^{n-3} + ... + a_n \in \mathbb{C}[X]$, având rădăcinile complexe $x_1, x_2, ..., x_n$.

a) Calculaţi $\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)^2 - n \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)$.

b) Demonstraţi că f are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă n = 2.

Soluţie:

a) Folosind primele două relaţii Vieté, obţinem că:

$\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)^2 - n \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right) = 4n^2 - n\left[4n^2 - 2\left(2n^2-4\right)\right] = 4n^2 - 8n$ 3p

b) Dacă toate rădăcinile sunt reale, folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă că $\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)^2 - n \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right) \leq 0$. Ţinând seama de punctul a), deducem că $n \leq 2$, prin urmare n = 2 .... 2p

Reciproc, dacă n = 2, atunci $f = X^2 - 4X + 4$, polinom care are ambele rădăcini reale. 2p

<u>**Notă:**</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.